T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni
LISTA 1

Wrocław, 1 marca 2010

ZADANIE 1. Sprawdź, że poniższa metryka euklidesowa w $\mathbb{R}^n$ spełnia warunek trójkąta:

$$d(\langle x_1,\ldots,x_n\rangle,\langle y_1,\ldots,y_n\rangle)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

ZADANIE 2. Sprawdź, że poniższe metryki w przestrzeni $C([0,1])$ funkcji rzeczywistych ciągłych na [0,1] spełniają aksjomat tożsamości i warunek trójkąta.

$$d_1(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$$

$$d_2(f,g)=\sqrt{\int_0^1 (f(x)-g(x))^2dx}$$

ZADANIE 3.
a) Udowodnij, że jeśli d_1 i d_2 są metrykami na X, to

$$d_\Sigma(x,y)=d_1(x,y)+d_2(x,y)\quad\text{oraz}\quad d_{\max}(x,y)=\max\{d_1(x,y),d_2(x,y)\}$$

też są metrykami na X.

b) Podaj przykłady na to, że $\min\{d_1,d_2\}$ (co rozmumiemy jako $\min\{d_1(x,y),d_2(x,y)\}$) nie musi być metryką. (Tylko jeden aksjomat może nawalić, który?)

c) Mimo to sprawdź, że $\bar{d}=\min\{d,d_0\}$, gdzie d jest dowolną metryką, a d_0 oznacza metrykę dyskretną, jest zawsze metryką. Jest to tzw. *metryka obcięta na poziomie 1*: odległość punktów nigdy nie przekracza 1.

ZADANIE 4. Udowodnij poniższe nierówności w dowolnej przestrzeni metrycznej. Podaj ich interpretacje w języku potocznym. Wykaż, że każda z nich jest *de facto* równoważna z warunkiem trójkąta.

$$d(x,y)\geq|d(x,z)-d(y,z)|,\qquad |d(x,y)-d(z,v)|\leq d(x,z)+d(y,v)$$

ZADANIE 5. Mając pseudometrykę skonstruuj przestrzeń metryczną, której punktami są odpowiednie klasy równoważności. Sprawdź wszystkie aksjomaty.

ZADANIE 6. Powyższa technika pozwala „zrobić” metrykę z pseudometryki, czyli z „czegoś”, co nie spełnia TYLKO aksjomatu tożsamości (jednej implikacji). Jeśli

,,coś" nie spełnia TYLKO warunku trójkąta, to możemy z tego zrobić metrykę optymalizacyjną (na tej samej przestrzeni). Jak naprawić ,,coś", co nie spełnia TYLKO aksjomatu symetrii? (Okaże się to o wiele łatwiejsze niż obie wyżej wspomniane konstrukcje.)

ZADANIE 7. Udowodnij, że jeśli $y \in K(x,r)$ to istnieje promień $r_y > 0$ taki, że $K(y,r_y) \subset K(x,r)$.

ZADANIE 8. W $\mathbb{R}^2$ (to samo można zrobić w $\mathbb{R}^n$) rozważmy trzy metryki: euklidesową, taksówkową i mertykę maksimum. Sprawdź, że kula wokół ustalonego punktu w każdej z tych metryk zwiera kulę (być może o innym promieniu - jakim?) wokół tego samego punktu w każdej w pozostałych metryk.

ZADANIE 9. Odległość punktu $x \in X$ od zbioru $F \subset X$ w przestrzeni metrycznej (X,d) określamy wzorem

$$d(x,F) = \inf_{y \in F} d(x,y).$$

Podaj przykład na to, że NIE obowiązuje następujące uogólnienie warunku trójkąta

$$d(x,y) \leq d(x,F) + d(y,F).$$

Wykaż jednak, że pozostaje w mocy analogon pierwszej nierówności z zadania 4

$$d(x,y) \geq |d(x,F) - d(y,F)|.$$

(Dlaczego u licha nie ma między nimi równoważności, skoro w zadaniu 4 była)?

ZADANIE 10. Spróbujmy wprowadzić takie oto ,,metryki" w klasie wszystkich podzbiorów przestrzeni metrycznej (X,d):

$$d_{\inf}(E,F) = \inf_{x \in E,\, y \in F} d(x,y), \quad d_{\sup}(E,F) = \sup_{x \in E,\, y \in F} d(x,y).$$

Dlaczego są to próby nieudane? Istnieje sposób, aby to zrobić dobrze, ale wymaga on trochę więcej zachodu. Być może do tego wrócimy.

Tomasz Downarowicz